www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES STATISTICIENS ECONOMISTES

OPTION MATHEMATIQUES — MAI 1989

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES — (Durée : 4 heures)

PREAMBULE

Dans tout le problème, on se place sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ défini sur le corps $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}^n$ constitue l'espace des vecteurs colonnes de taille n, de composantes complexes. La norme de référence sur $\mathbb{C}^n$ est la norme euclidienne :

$$\forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n \quad : \quad \|x\|_n = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right]^{1/2}$$

On note $\mathcal{L}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^n)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{C}^r$ dans $\mathbb{C}^n$. Une application linéaire de $\mathbb{C}^r$ dans $\mathbb{C}^n$ sera identifiée à sa représentation matricielle dans la base canonique : A, matrice de taille (n,r), à éléments complexes. De même, on identifiera un r-uplet de $\mathbb{C}^n$ $(q_1, \ldots, q_r)$ à sa représentation matricielle (n,r) dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$: $Q = [q_1, \ldots, q_r]$. L'adjointe d'une matrice A, c'est-à-dire sa transposée conjuguée, est notée A^*. Une matrice Q rectangulaire (n,r) est dite orthogonale si et seulement si $Q^*Q = I_r$, où I_r désigne la matrice identité de taille r ; une matrice Q carrée de taille (n,n) est dite unitaire si et seulement si :

$$Q^*Q = QQ^* = I_n .$$

I

1 - Soit $\mathbb{C}^{n \times r}$ l'ensemble des matrices (n,r) sur $\mathbb{C}$, isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^n)$. Etant données les normes euclidiennes respectives $\|.\|_r$, $\|.\|_n$ sur $\mathbb{C}^r$ et $\mathbb{C}^n$, on introduit pour toute matrice A de $\mathbb{C}^{n \times r}$, la quantité :

$$\|A\| = \max_{\substack{x \in \mathbb{C}^r \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_n}{\|x\|_r} .$$

Montrer que l'application $\|.\|$ ainsi définie sur $\mathbb{C}^{n \times r}$ constitue une norme.

2 - Etablir que si A et B sont deux matrices pour lesquelles le produit AB a un sens, on a :

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

3 - Montrer que $\|A\|$ est égale à la racine carrée de la plus grande valeur propre de A^*A.

4 - Quelle est la norme d'une matrice orthogonale Q ?

II

On appelle valeurs singulières d'une matrice A rectangulaire (n,r), les r nombres réels positifs ou nuls, qui sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice A^*A de taille (r,r). On considère deux sous-espaces vectoriels E et F de l'espace $\mathbb{C}^n$, de même dimension r. On suppose données deux bases orthonormales Q et U dans E et F, c'est-à-dire deux matrices orthogonales de taille (n,r) ; on a ainsi identifié la base $(q_1, \ldots, q_r)$ et la matrice $Q = [q_1, \ldots, q_r]$.

1 - Vérifier que les valeurs singulières de U^*Q sont comprises entre 0 et 1.

On note alors $c_i = \cos \theta_i$, $i = 1, \ldots, r$, $0 \leq \theta_i \leq \pi/2$ ces valeurs singulières rangées par ordre croissant et on appelle angles canoniques entre les sous-espaces E et F les r angles θ_i, $i = 1, \ldots, r$.

2 - Que dire des valeurs singulières c_i, $i = 1, \ldots, r$, lorsque $r > n/2$?

3 - Vérifier que U^*Q est inversible si et seulement si $\theta_1 < \pi/2$.

4 - On appelle couple de bases adjointes de E et F un couple (A,B) de matrices (n,r) vérifiant :

- A est une base orthonormale de E,
- B est une base de F,
- $B^*A = I_r$.

On dira dans ce cas que A admet B comme base adjointe dans F.

Montrer que Q admet une base adjointe dans F, notée V, si et seulement si $\theta_1 < \pi/2$.

5 - Soient (A,B) et (A',B') deux couples de bases adjointes dans E et F. Etablir l'existence d'une matrice D inversible de taille (r,r) telle que :

$$A' = AD \text{ et } B' = B(D^{-1})^* .$$

.../...

page 128 1989 1 ECOLE NATIONALE de L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE M'-Math 1

6 - Montrer que les valeurs singulières de V sont :

$\frac{1}{\cos \theta_i}$, $i = 1,\ldots,r$ et que celles de Q-V sont : $\operatorname{tg} \theta_i$, $i = 1,\ldots,r$.

7 - On considère le cas n=2 et deux sous-espaces E et F de même dimension 1, engendrés respectivement par les vecteurs normés $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$.

a) Déterminer l'angle canonique θ_1 et expliciter la condition $\theta_1 < \pi/2$.

b) Décrire tous les couples de bases adjointes dans E et F ; vérifier sur cet exemple les résultats montrés au II.6).

8 - On considère le cas n=4 et deux sous-espaces E et F de même dimension 2, de bases orthonormales :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 \\ 0 & \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \theta & -\sin \beta \sin \theta \\ \sin \alpha \sin \theta & \sin \beta \cos \theta \end{bmatrix}$$

avec : $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer les angles canoniques θ_1, θ_2 et discuter la condition $\theta_1 < \pi/2$.

b) Expliciter une base adjointe de Q et vérifier sur cet exemple les résultats établis en II.6).

III

Etant donné un sous-espace E de $\mathbb{C}^n$, on peut introduire le sous-espace orthogonal de E : $E^{\perp} = \{x \in \mathbb{C}^n : x^* y = 0, \ \forall y \in E\}$. Tout élément de $\mathbb{C}^n$ peut alors se décomposer de façon unique comme somme d'un élément de E et d'un élément de $E^{\perp}$:

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \ \exists! \ y \in E, \ \exists! \ z \in E^{\perp} \ : \ x = y + z.$$

L'application linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ qui à x associe y, est appelée projecteur orthogonal sur E et est notée π_E. Cette application est telle que :

$$\pi_E^2 = \pi_E \text{ (idempotente) et } \pi_E^* = \pi_E \text{ (hermitienne).}$$

Soient E et F deux sous-espaces de dimensions non nécessairement égales. On définit l'ouverture entre E et F, comme :

$$\omega(E,F) = \|\pi_E - \pi_F\|.$$

1 - On introduit la distance entre un vecteur x et un sous-espace E par : $d(x,E) = \operatorname{Min}_{y \in E} \|x-y\|$.

Etablir que : $\omega(E,F) = \operatorname{Max} \left\{ \operatorname{Max}_{\substack{x \in E \\ x^* x = 1}} d(x,F), \ \operatorname{Max}_{\substack{y \in F \\ y^* y = 1}} d(y,E) \right\}$.

2 - Montrer que $\omega(E,F) < 1$ implique dim E = dim F.

3 - On suppose dans cette question que dim E = dim F = r < n/2.

On se donne deux bases orthonormales Q et U de E et F respectivement et l'on note $\theta_1,\ldots,\theta_r$ les angles canoniques associés, tels qu'ils sont définis au II.

a) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\tilde{Q}$ de E que l'on peut compléter en une base $(\tilde{Q},\hat{Q})$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle les projecteurs orthogonaux s'écrivent sous la forme :

$$\pi_E = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi_F = \begin{bmatrix} C \\ -S \\ 0 \end{bmatrix} [C, -S, 0],$$

avec :

$$C = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \cos \theta_r \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sin \theta_r \end{bmatrix}$$

b) En déduire que les 2r valeurs propres non nécessairement nulles de $\pi_E - \pi_F$ sont égales à $\pm \sin \theta_i$, $i = 1,\ldots,r$.

c) Vérifier que $\omega(E,F) = \sin \theta_r$.

4 - Reprendre ces divers résultats, dans le cas particulier où n=2 et où les deux sous-espaces E et F sont de dimension 1, respectivement engendrés par les vecteurs normés $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$.

•oo/ooo

(On donnera notamment les matrices représentatives des projecteurs orthogonaux dans la base canonique initiale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et dans la base $(\tilde{Q},\hat{Q})$ introduite en III.3)a)).

IV

$(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$, dont on veut définir la convergence vers un sous-espace E de $\mathbb{C}^n$. On note : $\dim E_k = r_k$, $\dim E = r$.

On dira que (E_k) converge vers E lorsque k tend vers l'infini si et seulement si $\lim_{k\to\infty} \omega(E_k,E) = 0$.

1 - Etablir que si (E_k) converge vers E, $r_k = r$ pour k assez grand.

2 - Soient Q_k et Q des bases orthonormales de E_k et E respectivement. Vérifier que (E_k) converge vers E si pour k assez grand, il existe des matrices unitaires U_k telles que : $\lim_{k\to\infty} Q_k U_k = Q$.

[On pourra utiliser le fait que $\pi_E = QQ^*$].

3 - On suppose que (E_k) converge vers E et on désigne par Q_k une base orthonormale de E_k. Etablir qu'il existe une sous-suite (Q_{k_ℓ}) de (Q_k) et une base orthonormale V de E telles que : $\lim_{\ell\to\infty} Q_{k_\ell} = V$.

4 - On suppose que (E_k) converge vers E et on désigne par Q une base orthonormale de E. Vérifier qu'il existe des bases orthonormales V_k de E_k telles que $\lim_{k\to\infty} V_k = Q$.

5 - On suppose $n = 2$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $E_k = E = \mathbb{R}^2$. Discuter les résultats des questions précédentes à partir des bases orthonormales :

$$Q_k = \begin{pmatrix} \sin(1/\varepsilon_k) & \cos(1/\varepsilon_k) \\ \cos(1/\varepsilon_k) & -\sin(1/\varepsilon_k) \end{pmatrix},$$

où (ε_k) est une suite de réels strictement positifs tendant vers zéro.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail